Funkcje analityczne

Egzamin 07.02.2024

Zadanie 2. Uzasadnij, że wielomian $P(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z + 8$ ma dokładnie dwa pierwiastki (uwzględniając krotności) w zbiorze $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że skoro P ma współczynniki rzeczywiste dodatnie, nie zeruje się na półprostej $[0, \infty)$. Podobnie, dla każdego $y \geqslant 0$ mamy $P(\mathrm{i}y) = (y^4 - 6y^2 + 8) + \mathrm{i}(y^5 - 4y^3 + 3y) \neq 0$. Istotnie, gdyby $P(\mathrm{i}y) = 0$, to mielibyśmy $y^4 - 6y^2 + 8 = y^4 - 4y^2 + 3 = 0$, skąd $2y^2 - 5 = 0$, jednak wtedy mielibyśmy $y^4 - 6y^2 + 8 = -\frac{3}{4} \neq 0$.

Weźmy $R > 0$ tak duże, aby wszystkie pierwiastki wielomianu P leżące w obszarze Ω spełniały nierówność $|z| < R$. Niech N będzie liczbą pierwiastków (z uwzględnieniem krotności) wielomianu P leżących w Ω. Niech Γ_R będzie konturem złożonym z: odcinka $[0, R]$, dodatnio zorientowanego łuku okręgu $\gamma_R(t) = Re^{\mathrm{i}t}$ $(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$ oraz odcinka $[\mathrm{i}R, 0]$. Na mocy zasady argumentu mamy

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\, \mathrm{d}z = N,$$

czyli $\Delta_{\Gamma_R}(\arg P(z)) = \Delta_{[0,R]}(\arg P(z)) + \Delta_{\gamma_R}(\arg P(z)) + \Delta_{[\mathrm{i}R,0]}(\arg P(z)) = 2\pi N$, gdzie $\Delta_\kappa(\arg P(z))$ oznacza przyrost argumentu wartości $P(z)$ na krzywej κ. Obliczmy kolejno trzy składniki powyższej sumy.

1° Jest oczywiste, że $\Delta_{[0,R]}(\arg P(z)) = 0$, bo P przyjmuje wyłącznie wartości rzeczywiste na odcinku $[0, R]$.

2° Ponieważ $\frac{P(z)}{z^5} - 1 \to 0$ przy $|z| \to \infty$, mamy

$$\begin{aligned}\Delta_{\gamma_R}(\arg P(z)) &= \Delta_{\gamma_R}(\arg z^5) + \Delta_{\gamma_R}\Big(\arg\Big(1 + \frac{z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z + 8}{z^5}\Big)\Big) = \\ &= \frac{5}{2}\pi + o(1), \quad \text{przy } R \to \infty.\end{aligned}$$

3° Obrazem odcinka $[\mathrm{i}R, 0]$ przez wielomian P jest krzywa, która we współrzędnych kartezjańskich ma parametryzację

$$y \longmapsto \mathbf{p}(y) = (u(y), v(y)) \coloneqq (y^4 - 6y^2 + 8, y^5 - 4y^3 + 3y), \quad 0 \leqslant y \leqslant R,$$

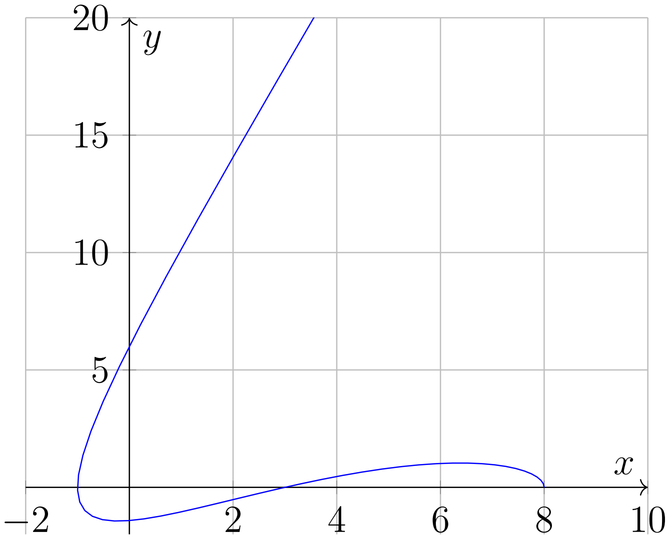
przy czym przyjmujemy tu orientację ujemną, tj. punktem początkowym jest $\mathbf{p}(R) = (R^4 - 6R^2 + 8, R^5 - 4R^3 + 3R)$, a punktem końcowym $\mathbf{p}(0) = (8, 0)$. Ponieważ $v(y) = y(y^2 - 1)(y^2 - 3)$, krzywa $\mathbf{p}$ przecina oś rzeczywistą w trzech punktach: w punkcie $\mathbf{p}(\sqrt{3}) = (-1, 0)$, w punkcie $\mathbf{p}(1) = (3, 0)$, a także w punkcie końcowym $\mathbf{p}(0) = (8, 0)$. Ponadto, dla $y \in (\sqrt{3}, R)$ punkty $\mathbf{p}(y)$ leżą w górnej półpłaszczyźnie, następnie dla $y \in (1, \sqrt{3})$ leżą one w dolnej półpłaszczyźnie i w końcu dla $y \in (0, 1)$ leżą znów w górnej półpłaszczyźnie. Mamy także $\mathrm{Arg}\,\mathbf{p}(0) = 0$ oraz

$$\mathrm{Arg}\,\mathbf{p}(R) = \mathrm{arctg}\,\frac{R^5 - 4R^3 + 3R}{R^4 - 6R^2 + 8} \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Obserwacje te pokazują, że

$$\Delta_{[\mathrm{i}R,0]}(\arg P(z)) = 2\pi - \mathrm{Arg}\,\mathbf{p}(R) = \frac{3}{2}\pi + o(1) \quad \text{przy } R \to \infty.$$

Fragment krzywej $\mathbf{p}$ przedstawiony jest na poniższym rysunku.



W konsekwencji $\Delta_{\Gamma_R}(\arg P(z)) = 4\pi + o(1)$, czyli dla dostatecznie dużych $R > 0$ mamy $\Delta_{\Gamma_R}(\arg P(z)) = 4\pi$, skąd $N = 2$. ■

Szkic alternatywnego rozwiązania zadania 2

Oprócz wielomianu $P(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z + 8$ rozważmy wielomian $Q = P + 1$ oraz rodzinę wielomianów $(W_t)_{t\in[0,1)}$ określoną wzorem $W_t = P + t$. Oczywiście $W_0 \equiv P$, a ponadto W_t zbiega do Q jednostajnie na $\mathbb{C}$, gdy $t \to 1^-$. Ponieważ

$$Q(z) = \big(z^2 + 3\big)\big(z^3 + z^2 + z + 3\big),$$

to Q ma dokładnie pięć jednokrotnych zer, z których trzy łatwo wskazać: $\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, $-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ oraz ujemny pierwiastek wielomianu z^3+z^2+z+3, którego istnienie wynika z twierdzenia Darboux. Dla wielomianu z^3+z^2+z+3 bardzo łatwo odpowiedzieć na pytanie analogiczne do postawionego w treści zadania: ma on dokładnie jedno zero w zbiorze Ω, tj. w otwartej pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej. Aby to wykazać, wystarczy zauważyć, że $|z^3 + 3| > |z^2 + z|$ na półprostych $[0, \infty)$ oraz $[0, \mathrm{i}\infty)$, a także wtedy, gdy $|z| > 2024$, co jest naprawdę proste do sprawdzenia, a następnie skorzystać z twierdzenia Rouchégo. Skoro zaś wszystkie współczynniki tego wielomianu są rzeczywiste, to ostatnie jego miejsce zerowe jest sprzężone do tego, które należy do Ω.

Dla żadnego $t \in [0, 1)$ wielomian W_t nie ma zer na półprostej $[0, \infty)$ ani na półprostej $[0, \mathrm{i}\infty]$, ani też w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2024\}$. Sprawdza się to znów łatwo, prawie dokładnie tak samo, jak dla wielomianu $P \equiv W_0$. Stąd wynika – jak w dowodzie twierdzenia Rouchégo – że każdy z wielomianów W_t ma tyle samo zer w zbiorze Ω (licząc z krotnościami), więc aby zakończyć rozwiązanie zadania, wystarczy udowodnić, że dla pewnego t dostatecznie bliskiego jedności (ale wciąż mniejszego od 1) wielomian W_t ma w zbiorze Ω dokładnie dwa miejsca zerowe (licząc z krotnościami). Tu skorzystamy z twierdzenia Hurwitza i poczynionej wcześniej obserwacji o zbieżności jednostajnej. Trzy z miejsc zerowych wielomianu Q leżą poza domknięciem obszaru Ω, a jedno w tym obszarze. Trzeba więc tylko udowodnić, że zera wielomianów W_t zbiegające do $\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, gdy $t \to 1^-$, robią to z prawej strony osi urojonej dla t dostatecznie bliskich 1. To jest jednak dość oczywiste: gdy oznaczymy takie miejsce zerowe jako z_t, to

$$\frac{1-t}{z_t - \sqrt{3}\,\mathrm{i}} = \frac{\big(W_t(z_t) + (1-t)\big) - 0}{z_t - \sqrt{3}\,\mathrm{i}} = \frac{Q(z_t) - Q\big(\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)}{z_t - \sqrt{3}\,\mathrm{i}}$$

dąży do $Q'\big(\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big) = 12$, gdy $t \to 1^-$, więc $\mathrm{Re}\,(z_t)/(1-t) \xrightarrow{t\to 1^-} 1/12 > 0$.

Zadanie trzecie z egzaminu

Rozwiązanie:
Mamy

$$z^2 + 2(\cos z - 1) = z^2 - 4\sin^2\frac{z}{2} = z^2\left(1 - \frac{\sin^2\frac{z}{2}}{\frac{z^2}{4}}\right).$$

W mianowniku otrzymujemy:

$$e^z - z^2 - 1 = z\left(1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}\right).$$

Stąd

$$\lim_{z\to 0} g(z) = 0,$$

więc wystarczy położyć $\widetilde{g}(0) = 0$. Niech $\widetilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Wówczas

$$\widetilde{g}(z)(e^z - z^2 - 1) = z^2 + 2\cos z - 2.$$

Teraz uzyskujemy:

$$e^z - z^2 - 1 = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + o(z^4),$$
$$z^2 + 2\cos z - 2 = \frac{z^4}{12} + o(z^5).$$

Widzimy od razu, że musi być $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ (porównanie współczynników przy niższych potęgach). Dalej piszemy $c_3 = \frac{1}{12}$ (porównanie współczynnika przy z^4) i $-\frac{1}{2}c_3 + c_4 = 0$, co daje $c_4 = \frac{1}{24}$.
Skoro licznik ma zero krotności trzy, a mianownik ma zero krotności pięć, to mamy do czynienia z biegunem drugiego rzędu, czyli część główna ma postać $\frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z}$. Zatem

$$c_{-2} = \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{g(z)}{z^3} = \frac{1}{12}.$$

Aby policzyć c_{-1} (czyli szukane residuum) rozważamy granicę:

$$c_{-1} = \lim_{z\to 0} z\left(f(z) - \frac{1}{12z^2}\right) = \frac{1}{24}.$$

Kryteria oceny:

1. Pierwszy podpunkt - 3 punkty.
2. Drugi podpunkt - 7 punktów.
3. Trzeci podpunkt - 5 punktów.

Przykładowe rozwiązanie zadania 4

(a) Na obszarze $\Omega_N = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > -N\}$ funkcję f_N możemy przedstawić w postaci sumy dwóch funkcji holomorficznych na Ω_N:

$$f_N(z) = \frac{(-1)^N}{N! \cdot (N+z)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+z)}.$$

Drugi składnik jest na obszarze Ω_N jednostajnie zbieżnym (czyli również niemal jednostajnie zbieżnym) szeregiem funkcji holomorficznych, więc na mocy twierdzenia Weierstrassa suma tego szeregu również jest funkcją holomorficzną na Ω_N; aby zaś udowodnić tę jednostajną zbieżność, wystarczy zauważyć, że gdy $n \geq N+1$, a $z \in \Omega_N$, to

$$\mathrm{Re}\,(n+z) = n + \mathrm{Re}\, z \geq (N+1) - N = 1,$$

a zatem $|n+z| \geq |\mathrm{Re}\,(n+z)| \geq 1$, skąd już wynika, że

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sup_{z \in \Omega_N} \left| \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+z)} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot |n+z|} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \mathrm{e} < \infty.$$

(b) Dla każdej dodatniej liczby całkowitej N możemy przedstawić funkcję f w postaci sumy

$$f(z) = f_N(z) + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+z)},$$

której pierwszy składnik jest funkcją holomorficzną na zbiorze Ω_N, co wykazaliśmy w punkcie **(a)**, drugi zaś jest skończoną sumą funkcji holomorficznych na zbiorze $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, a więc również funkcją holomorficzną na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Stąd wynika, że funkcja f jest holomorficzna na obszarze $\Omega_N \cap (\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\})$ dla każdego N, zatem jest również holomorficzna na zbiorze

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} (\Omega_N \cap (\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\})) = \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \Omega_N \right) \cap (\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\})$$
$$= \mathbb{C} \cap (\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}) = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

Zbiór $\{0, -1, -2, \ldots\}$ nie ma punktów skupienia, więc jego elementy są osobliwościami punktowymi funkcji f. Osobliwości te są biegunami prostymi, co łatwo udowodnić, przedstawiając dla $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ funkcję f w postaci sumy

$$f(z) = \frac{(-1)^m}{m! \cdot (m+z)} + f_{m+1}(z) + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+z)},$$

której pierwszy składnik jest funkcją meromorficzną mającą w punkcie $-m$ biegun prosty, a pozostałe $m+1$ składników to funkcje holomorficzne na otwartym otoczeniu tego punktu (przyda się punkt **(a)** oraz fakt, że $-m$ należy do otwartego zbioru Ω_{m+1}). Wynika stąd również, że $\mathrm{Res}_(f;-m) = (-1)^m/m!$, co przyda nam się w punkcie **(c)**. Funkcja f jest zatem meromorficzna na $\mathbb{C}$.

(c) Zgodnie z oznaczeniami wprowadzonymi w treści zadania

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{S(0,k+\frac{1}{2})} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{S(0,k+\frac{1}{2})} \big(f''(z) - f'(z) + 2f(z)\big)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{S(0,k+\frac{1}{2})} f''(z)\,\mathrm{d}z - \int_{S(0,k+\frac{1}{2})} f'(z)\,\mathrm{d}z + 2\int_{S(0,k+\frac{1}{2})} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= 0 + 0 + 2\int_{S(0,k+\frac{1}{2})} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\int_{S(0,k+\frac{1}{2})} f(z)\,\mathrm{d}z; \end{aligned}$$

skorzystaliśmy tu z faktu, że funkcje f'' oraz f' mają funkcje pierwotne (odpowiednio f' oraz f) na zbiorze $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$ zawierającym $S\big(0,k+\frac{1}{2}\big)$. Z twierdzenia o residuach wnioskujemy więc, że

$$a_k = 2\int_{S(0,k+\frac{1}{2})} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{ind}_{S(0,k+\frac{1}{2})}(-m)\mathrm{Res}_(f;-m)$$

$$= 4\pi\mathrm{i}\sum_{m=0}^{k} \mathrm{Res}(f;-m) \overset{\textbf{(b)}}{=} 4\pi\mathrm{i}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m}{m!} \xrightarrow{k\to\infty} 4\pi\mathrm{i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!} = 4\pi\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{i}.$$